

IL RUOLO DELLA MISURA DELLA VOLATILITÀ NELLA GESTIONE DEL RISCHIO NEI MERCATI FINANZIARI

Emilio Barucci - Università di Pisa barucci@ec.unipi.it

Roberto Renò - Università di Siena reno@unisi.it

In questa breve nota viene proposto un riassunto dei principali risultati ottenuti di recente dagli autori nell'ambito della misura della volatilità con i dati ad alta frequenza. Viene messa in risalto la rilevanza economica dei risultati, sia per la gestione dei fondi che per l'analisi del VaR.

1. INTRODUZIONE

Il ruolo della volatilità nei mercati finanziari è cruciale. Recenti contributi in questo settore hanno dimostrato come una corretta analisi della volatilità a fini previsivi sia necessaria per una adeguata gestione del rischio. Esempi sono Andersen e Bollerslev (1998), Andersen et al. (2001), Barucci e Renò (2001a,b,c). In questo lavoro mostriamo alcuni risultati che dimostrano questa tesi, tratti da recenti lavori in questo campo. La letteratura empirica ha dimostrato che mentre i rendimenti sono difficilmente prevedibili (l'ipotesi di martingala: la migliore previsione del prezzo di domani è il prezzo di oggi), la volatilità è altamente persistente, e quindi può essere prevista. In particolare i risultati descritti in questa nota mettono in evidenza come un buon modello per la volatilità possa avere importanti applicazioni. La prima, e più diretta, è quella del calcolo del Value at Risk (VaR). La volatilità infatti, essendo la varianza dei rendimenti, se prevista permette di estrarre agevolmente i quantili della distribuzione normale. La letteratura empirica mostra infatti come mentre la distribuzione incondizionata dei rendimenti sia lontana dall'essere distribuita come una normale (il fenomeno delle "code grasse"), la distribuzione dei rendimenti divisi per la volatilità sia invece normale con ottima approssimazione. Una seconda applicazione descritta è quella della gestione dei fondi. Un manager che abbia a disposizione un modello affidabile per la previsione della volatilità può infatti implementare una gestione dinamica del classico criterio di media-varianza, con ovvi vantaggi economici.

2. STIMATORI DELLA VOLATILITÀ

Uno dei principali avanzamenti dell'econometria recente è rappresentato dall'utilizzo ormai usuale dei dati ad alta frequenza. In letteratura sono state affinate metodologie di filtro di questi dati che permettono di utilizzarli e, in particolare, di misurare la varianza giornaliera con una precisione decisamente superiore alle misure ottenute con dati giornalieri. In particolare, Andersen e Bollerslev (1988) mostrano come il fallimento della capacità previsiva dei modelli GARCH testimoniato dalla letteratura empirica dei primi anni '90 non fosse dovuto all'incapacità dei modelli autoregressivi di modellizzare la persistenza della volatilità, ma dalla misura utilizzata per valutare la volatilità *ex post*, cioè il rendimento quadratico. Tale misura è, infatti, troppo rumorosa per permettere una valida giustificazione della reiezione di capacità previsive per qualsivoglia modello, un risultato mostrato anche in Barucci e Renò (2001a). Come accennato in precedenza, i dati ad alta frequenza permettono una stima molto più precisa della volatilità giornaliera. Un esempio è rappresentato dal cosiddetto *range* (Alizadeh, Brandt e Diebold, 2001), definito come:

$$R(t, T) = 0.361 \cdot \left(\sup_{t \leq s \leq T} p(s) - \inf_{t \leq s \leq T} p(s) \right)^2, \quad (1)$$

dove $p(t) = \log S(t)$, e $S(t)$ è il prezzo di un contratto finanziario (un'azione, una valuta estera). Il *range* utilizza quindi il massimo e il minimo raggiunto dal prezzo in un determinato giorno di contrattazione; esso è facilmente reperibile in quanto piuttosto diffuso sulla stampa specializzata.

Andersen e Bollerslev (1998) propongono invece la cosiddetta *realized volatility*, definita come:

$$\sigma^2(t, t+1) = \sum_{i=1}^{m-1} \left[p\left(t + \frac{i+1}{m}\right) - p\left(t + \frac{i}{m}\right) \right]^2 \quad (2)$$

L'idea di base è molto semplice: la volatilità è data dalla somma dei rendimenti al quadrato. Una tipica scelta di m è tale da sommare i rendimenti ogni 5 minuti, ad esempio $m = 288$ per 24 ore di contrattazione. Tale scelta rappresenta un compromesso fra la tentazione di aumentare m per aumentare la precisione dello stimatore, e la necessità di fermarsi per evitare che effetti di microstruttura distorcano il risultato. La *realized volatility*, per essere implementata necessita di una griglia temporalmente equispaziata di prezzi; poichè i prezzi non sono osservati in ogni istante, tecniche di interpolazione si rendono necessarie. Infine Malliavin e Mancino (2001) propongono uno stimatore della volatilità basato sull'analisi di Fourier. Partiamo dall'assunzione che un vettore $p = (p_1, \dots, p_n)$ segua una diffusione del tipo:

$$dp_i = \mu_i dt + \sigma_{ij} dW_j,$$

dove (W_1, \dots, W_n) sono moti browniani indipendenti. La volatilità istantanea è definita come:

$$\Sigma_{ij}(t) := \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \mathbf{E}^{\mathcal{F}_t} [(p_i(t+\epsilon) - p_i(t)) \cdot (p_j(t+\epsilon) - p_j(t))].$$

La relazione fra $\Sigma(t)$ e il suddetto modello per p è data da:

$$\Sigma_{ij} = \sum_{k=1}^n \sigma_{ki} \sigma_{kj}.$$

Malliavin e Mancino (2001) dimostrano il seguente teorema. Se definiamo i coefficienti di Fourier di dp e Σ nel modo usuale (nel caso univariato):

$$a_0(dp) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dp(t), \quad a_k(dp) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(kt) dp(t), \quad b_k(dp) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(kt) dp(t)$$

$$a_0(\Sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Sigma(t) dt, \quad a_k(\Sigma) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(kt) \Sigma(t) dt, \quad b_k(\Sigma) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(kt) \Sigma(t) dt,$$

allora tali coefficienti di Fourier sono legati da:

$$a_0(\Sigma) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\pi}{N+1-n_0} \sum_{s=n_0}^N \frac{1}{2} [a_s^2(dp) + b_s^2(dp)]$$

$$a_k(\Sigma) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{N+1-n_0} \sum_{s=n_0}^N a_s(dp) a_{s+k}(dp)$$

$$b_k(\Sigma) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{N+1-n_0} \sum_{s=n_0}^N b_s(dp) b_{s+k}(dp)$$

I coefficienti di Fourier di Σ permettono di ricostruire la volatilità istantanea tramite inversione di Fourier:

$$\Sigma(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} \left(1 - \frac{k}{N}\right) [a_k(\Sigma) \cos(kt) + b_k(\Sigma) \sin(kt)].$$

La strategia di stima della volatilità è allora la seguente (Barucci e Renò 2001a,b): anzitutto si stimano i coefficienti di Fourier di dp ; tramite integrazione per parti l'operazione risulta agevole. Le formule suddette permettono quindi di ricavare i coefficienti di Fourier di Σ , e quindi, in ultima istanza, il valor medio di Σ nell'arco temporale (la volatilità integrata) come:

$$\int_t^{t+1} \sigma^2(s) ds = 2\pi a_0(\Sigma)$$

La figura 1 mostra il comportamento dei diversi stimatori su serie simulate; il processo del prezzo simulato è un GARCH(1,1) in tempo continuo (Barucci e Renò, 2001a). Nella figura 1 viene fatta distinzione fra interpolazione lineare e imputazione nel caso della *realized volatility*. In ogni caso, l'estimatore di Fourier è migliore sia per l'assenza di *bias* che per la sua precisione. Lo stimatore appena descritto risulta anche particolarmente utile per la valutazione della capacità previsiva di un modello GARCH(1,1). Barucci e Renò (2001a) mostrano come, sia su serie simulate che su tassi di cambio, si ottenga una migliore capacità previsiva rispetto alla *realized volatility*. Tali risultati permangono anche estendendo il modello GARCH(1,1) a frequenze più elevate.

Questi risultati, infine, si estendono naturalmente al caso multivariato. Un esempio di tale applicazione è mostrato in Renò (2001).

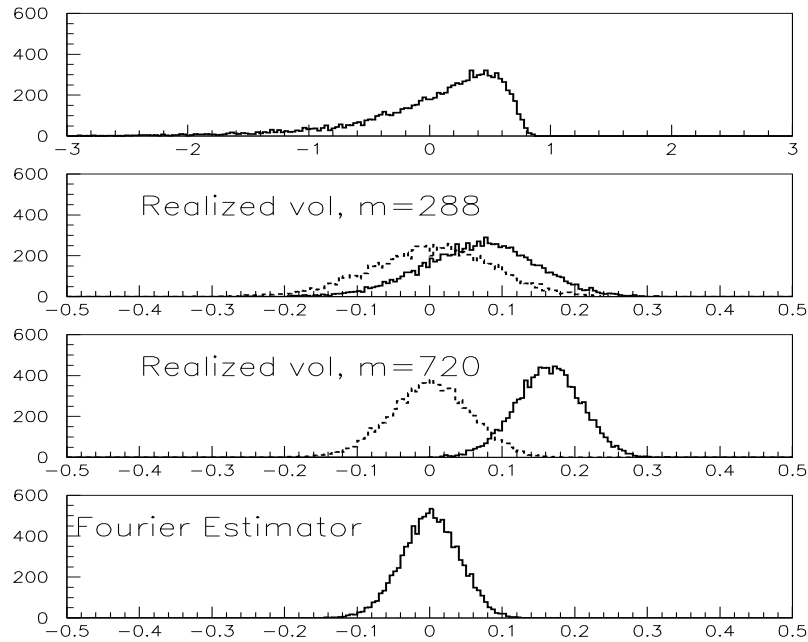


Figure 1: Distribuzione di $\frac{\int_0^1 \sigma^2(t) dt - \hat{\sigma}^2}{\sqrt{\int_0^1 \sigma^2(t) dt}}$, dove $\int_0^1 \sigma^2(t) dt$ è il valore generato nella simulazione e $\hat{\sigma}^2$ è ottenuto con diversi stimatori: in alto, il *range*; il secondo è la *realized volatility* con $m = 288$, la linea tratteggiata si riferisce all'interpolazione lineare, la linea continua all'imputazione; il terzo è ancora la *realized volatility* ma con $m = 720$; il quarto è lo stimatore di Malliavin e Mancino (2001).

2. APPLICAZIONI: VAR E GESTIONE DEI FONDI

La misura della volatilità giornaliera con i dati ad alta frequenza permette di modellare la volatilità come una variabile osservata anziché latente. Questo approccio è stato seguito in Andersen et al. (2001) e Barucci e Renò (2001c). Entrambi questi lavori dimostrano come un semplice modello autoregressivo per la volatilità funzioni meglio in fase previsiva di un GARCH(1,1) o dell'approccio di Riskmetrics. Barucci e Renò (2001c) modellizzano la volatilità osservata $\hat{\sigma}_t^2$ come:

$$\hat{\sigma}_t^2 = \sigma_0^2 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \hat{\sigma}_{t-i}^2 + \varepsilon_t,$$

dove ε_t sono rumori IID. Quest'equazione evolutiva può essere stimata semplicemente per minimi quadrati. Applicata alla previsione della volatilità del tasso di cambio dollaro-marco, tale specificazione con $n = 1$ ha un errore quadratico medio di 0.256 contro 0.272 del GARCH(1,1) e 0.267 di Riskmetrics. Nonostante la semplicità di questo modello, un banale $AR(1)$, solo il fatto di modellare la volatilità come una

variabile osservata permette un sostanziale miglioramento delle capacità previsive.

Questi risultati hanno un importante valore economico. Fleming, Kirby e Ostdiek (2001) dimostrano che un manager che implementi una strategia di selezione del portafoglio di media-varianza, che tenga debitamente in conto delle proprietà della varianza, può chiedere come compenso intorno al 2% in più del rendimento netto del portafoglio ad un investitore avverso al rischio, rispetto ad un manager che utilizzi una gestione statica del portafoglio. Questo risultato, di evidente portata, deriva dal fatto che modellizzare le ben note proprietà di persistenza della varianza porta ad un'analisi previsiva di successo.

3. CONCLUSIONI

In questo lavoro abbiamo brevemente rivisto alcuni dei risultati recentemente apparsi in letteratura sulla misura e la previsione della volatilità. L'utilizzo dei dati ad alta frequenza permette di misurare la volatilità giornaliera con grande precisione. Ciò permette di modellizzare meglio la volatilità osservata, quindi di prevederla meglio con importanti conseguenze sia per la misurazione del rischio che per la gestione dei fondi.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- ALIZADEH, S., BRANDT, M. and DIEBOLD, F. (2001): Range-Based Estimation of Stochastic Volatility Models. Forthcoming, *Journal of Finance*, 57.
- ANDERSEN, T. and BOLLERSLEV, T. (1998): Answering the Skeptics: Yes, Standard Volatility Models do Provide Accurate Forecasts. *International Economic Review*, 39: 885-905.
- ANDERSEN, T., BOLLERSLEV, T., DIEBOLD, F. and LABYS, P. (2001): Modeling and Forecasting Realized Volatility. NBER Working paper.
- BARUCCI, E. and RENÒ, R. (2001a): On measuring volatility and the GARCH forecasting performance. In stampa in *Journal of International Financial Markets, Institutions and Money*.
- BARUCCI, E. and RENÒ, R. (2001b): On Measuring Volatility of diffusion processes with high frequency data. In stampa in *Economic Letters*.
- BARUCCI, E. and RENÒ, R. (2001c): Value at Risk with high frequency data. In stampa in *New Trends in Banking management*, ed. Physica-Verlag.
- FLEMING, J., KIRBY, C. and OSTDIEK, B. (2001): The Economic Value of Volatility Timing. *Journal of Finance*, 56(1), 329-352.
- MALLIAVIN, P. and MANCINO, M. (2001). Fourier Series Method for Measurement of Multivariate Volatilities. In stampa in *Finance & Stochastics*.
- RENÒ, R. (2001). A closer look at the Epps effect. *Quaderni del dipartimento di Economia Politica*, Università di Siena, in stampa.